

P1. Considere la función $f \in L^2([-\pi, \pi])$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{si } -\pi \leq x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

1a) (1 pto.) Demuestre que su serie de Fourier (de senos y cosenos) está dada por

$$S_f(x) = \frac{2}{\pi} \left(\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \dots \right)$$

Usamos las ecuaciones (12)–(14) del formulario y queda

$$\begin{aligned} f(x) \approx S_f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad n \geq 0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad n > 0 \end{aligned}$$

Cómo f es esencialmente impar (salvo por el punto $x = 0$), resulta que $a_n = 0$.

Además

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos(nx)}{n} \right]_{\pi}^0 = \frac{1 - \cos(n\pi)}{n\pi} = \frac{1 - (-1)^n}{n\pi} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ par} \\ \frac{2}{n\pi} & \text{si } n \text{ impar } (n = 2k - 1) \end{cases}$$

Reemplazando queda:

$$S_f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}$$

1b) (1 pto.) Aplique la identidad de Parseval a f y deduzca una expresión para $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$

Si $f = \sum_n c_n \varphi_n$, en donde los φ_n forman una familia ortogonal completa, la identidad de Parseval dice que

$$\|f\|^2 = \sum_n |c_n|^2 \|\varphi_n\|^2$$

En nuestro caso,

$$\|f\|^2 = \frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2} \quad \|\sin((2k-1)x)\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2((2k-1)x) dx = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$

Por lo tanto

$$\frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi}{(2k-1)^2}, \text{ de donde: } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

1c) (1 pto.) Indique a qué converge la serie de Fourier, para cada uno de los valores de x en $[-\pi, \pi]$.

En todos los puntos en que f es continua, la serie converge hacia $f(x)$, es decir

$$\forall x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi), S_f(x) = f(x)$$

En $x = 0$ $f(x)$ es discontinua y

$$S_f(0) = \frac{1}{2} (f(0^-) + f(0^+)) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = 0$$

Análogamente, considerando que $S_f(x)$ recupera la extensión periódica de f ,

$$S_f(-\pi) = 0 \text{ y } S_f(\pi) = 0$$

pues en ambos extremos se producen discontinuidades similares a la presente en $x = 0$.

1d) (1 pto.) Si $S_N(x)$ representa la suma parcial n -ésima de Fourier de f , para $N = 2n + 1$ impar, esto es,

$$S_N(x) = \frac{2}{\pi} \left(\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \dots + \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1} \right)$$

pruebe que $S_N(x)$ que se puede representar como

$$S_N(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{\sin(2(N+1)u)}{\sin(u)} du$$

Indicación: Note que $\frac{\sin(kx)}{k} = \int_0^x \cos(ku) du$ y que la identidad trigonométrica $\cos(a) \sin(u) = 1/2(\sin(a+u) - \sin(a-u))$ permite transformar una cierta suma de cosenos en suma telescópica.

Según la indicación, la suma parcial es la integral de una suma de cosenos,

$$S_N(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \sum_{k=0}^N \cos((2k+1)u) du \quad \text{0.3pts}$$

y con la identidad trigonométrica, obtenemos para cada sumando, al multiplicar por $\sin(u)$

$$\cos((2k+1)u) \sin(u) = \frac{1}{2} (\sin(2(k+1)u) - \sin(2ku)) \quad \text{0.3pts}$$

por lo tanto

$$S_N(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \sum_{k=0}^N \cos((2k+1)u) \frac{\sin(u)}{\sin(u)} du = \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{\sin(2(N+1)u) - \sin(0)}{\sin(u)} du \quad \text{0.4pts}$$

1e) (0.5 ptos.) Pruebe que el primer máximo local de S_N en $(0, \pi)$ es $x_N = \frac{\pi}{2(N+1)}$.

Derivando, tenemos que

$$S'_N(x) = \frac{\sin(2(N+1)x)}{\sin(x)} \quad \text{0.3pts}$$

Luego, debemos buscar que $\sin(2(N+1)x) = 0$, lo cual ocurre en $2(N+1)x = k\pi$, siendo la primer raíz la correspondiente a $k = 1$ esto es $x_N = \pi/2(N+1)$ 0.2pts

Además sería fácil comprobar que se trata de un máximo, ya que

$$S''_N(x_N) = \frac{\cos(2(N+1)x_N) \sin(x_N) - \sin(2(N+1)x_N) \cos(x_N)}{\sin^2(x_N)} = \frac{\cos(\pi)}{\sin(x_N)} < 0$$

1f) (1 pto.) Pruebe que $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(x_N) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t} dt$. Se sabe que $\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t} dt = 0,58949\dots$

Indicación: Haga un cambio de variable en la expresión integral de $S_N(x_N)$ para llegar a una integral en $[0, \pi]$, y use que $\sin(t)/t$ es continua en torno a 0.

Con el cambio de variable $w = 2(N+1)u$ 0.3pts

$$\begin{aligned} S_N(x_N) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{x_N} \frac{\sin(2(N+1)u)}{\sin(u)} du = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(w)}{\sin\left(\frac{w}{2(N+1)}\right)} \frac{dw}{2(N+1)} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(w)}{w} \frac{\frac{w}{2(N+1)}}{\sin\left(\frac{w}{2(N+1)}\right)} dw \quad \text{0.3pts} \end{aligned}$$

como $\lim_{t \rightarrow 0} t/\sin(t) = 1$ para N suficientemente grande

$$\left| \frac{\frac{w}{2(N+1)}}{\sin\left(\frac{w}{2(N+1)}\right)} - 1 \right| \leq \epsilon \quad \text{0.2pts}$$

y $S_N(x_N)$ converge a $\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t} dt = 0,58949\dots$ 0.2pts

1g) (0.5 ptos.) Pruebe que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left\{ \max_{0 < x < \pi} |f(x) - S_N(x)| \right\} \geq 0,08949...$$

y explique si esto contradice o no, lo obtenido en la parte **1c)**.

Con el resultado anterior

$$\max_{0 < x < \pi} |f(x) - S_N(x)| \geq |f(x_N) - S_N(x_N)| \rightarrow \left| \frac{1}{2} - 0,58949... \right| = 0,08949... \quad \text{0.2pts}$$

Esto **no** contradice la convergencia puntual, pues lo que falla es la convergencia de $S_N(x_N) - f(x_N)$ a cero, pero esto se obtiene variando el punto x_N , lo que no ocurre en la convergencia puntual. 0.3pts

P2. En este problema, Ω es un dominio abierto, simplemente conexo y acotado de \mathbb{R}^N donde $N = 2$ ó 3 , de frontera regular $\partial\Omega$. En este dominio se plantean diferentes EDP, que están asociadas de algún modo a la ecuación del calor.

EDP 1: Valores y Vectores propios Generales del Laplaciano.

Considere la EDP siguiente, con condición de borde Dirichlet homogénea:

$$(EDP) : \quad \Delta\phi(\vec{x}) = -\lambda\phi(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in \Omega \quad (1)$$

$$(CB) : \quad \phi(\vec{x}) = 0 \quad \forall \vec{x} \in \partial\Omega. \quad (2)$$

2a) (1.5 ptos.) Multiplique la ecuación (1) por una función escalar $g(\vec{x})$, integre por partes y demuestre que

$$\lambda \int_{\Omega} \phi(\vec{x})g(\vec{x})dx = \int_{\Omega} \nabla\phi(\vec{x}) \cdot \nabla g(\vec{x})dx \quad \forall g \text{ que cumpla la CB (2)}. \quad (3)$$

Indicación: Pueden serle útil las fórmulas (16)–(18) del formulario.

Multipliquemos (1) por $g(\vec{x})$ e integramos en Ω . Obtenemos:

$$\int_{\Omega} g(\vec{x})\Delta\phi(\vec{x})dx = -\lambda \int_{\Omega} g(\vec{x})\phi(\vec{x})dx \quad \text{0.3pts}$$

Usamos las fórmulas (16)–(17) para reescribir el lado izquierdo como:

$$\int_{\Omega} g(\vec{x})\Delta\phi(\vec{x})dx = \int_{\Omega} g(\vec{x})\text{div} \nabla\phi(\vec{x})dx = \int_{\Omega} \text{div}(g\nabla\phi) - \int_{\Omega} \nabla\phi \cdot \nabla g dx \quad \text{0.4pts}$$

Ahora usamos el teorema de la divergencia (fórmula (18)) y juntando todo queda:

$$-\lambda \int_{\Omega} g(\vec{x})\phi(\vec{x})dx = \int_{\partial\Omega} g(\vec{x})\nabla\phi \cdot \vec{n}(\vec{x})dS - \int_{\Omega} \nabla\phi(\vec{x}) \cdot \nabla g(\vec{x})dx \quad \text{0.5pts}$$

Terminamos usamos la Condición de Borde CB-(2) satisfecha por g . 0.3pts

2b) (1.5 ptos.) Use el resultado (3), en el caso particular $g = \phi$, para probar que la EDP (1)–(2) solo puede admitir soluciones no triviales (o sea con $\phi \neq 0$), para $\lambda > 0$.

Usamos la parte anterior en el caso particular $g = \phi$ (que satisface la CB-(2)).

Queda:

$$\lambda \int_{\Omega} \phi^2(\vec{x})dx = \int_{\Omega} |\nabla\phi(\vec{x})|^2dx \quad \text{0.5pts}$$

Si $\phi \neq 0$ en $L^2(\Omega)$ entonces la integral de ϕ^2 es diferente de cero (es su norma al cuadrado). Por lo tanto:

$$\lambda = \frac{\int_{\Omega} |\nabla\phi(\vec{x})|^2dx}{\int_{\Omega} \phi^2(\vec{x})dx}$$

Por tratarse de integrales de cuadrados el resultado es ≥ 0 . 0.5pts

Pero ¿Podrá ser cero?. Veamos por contradicción que no: Si $\lambda = 0$ entonces $\int_{\Omega} |\nabla\phi(\vec{x})|^2dx = 0$ de donde se deduce que $\phi = \text{constante}$. Pero por CB-(2), el valor de la constante debe ser cero. Luego $\phi \equiv 0$. Lo que es una contradicción. 0.5pts

2c) (1.5 pts.) Se sabe (úselo, sin demostración), que las soluciones no triviales de la EDP (1)–(2) (o sea con $\phi \neq 0$) solo existen para una colección numerable de lambdas positivos, que forman una sucesión estrictamente creciente $(\lambda_i)_{i=1}^{\infty}$, llamados los valores propios del Laplaciano. Además, para cada λ_i su correspondiente función propia se denota ϕ_i .

Use reiteradamente (3), con ϕ_i y ϕ_j para probar que

$$\int_{\Omega} \phi_i(\vec{x}) \phi_j(\vec{x}) dx = \int_{\Omega} \nabla \phi_i(\vec{x}) \cdot \nabla \phi_j(\vec{x}) dx = 0 \quad \forall i \neq j. \quad (4)$$

Es decir, demuestre que los vectores propios del Laplaciano en Ω son ortogonales entre sí.

Usamos (3), con $\phi = \phi_i$ y $g = \phi_j$ así obtenemos que

$$\lambda_i \int_{\Omega} \phi_i(\vec{x}) \phi_j(\vec{x}) dx = \int_{\Omega} \nabla \phi_i(\vec{x}) \cdot \nabla \phi_j(\vec{x}) dx. \quad (5)$$

Ahora usamos nuevamente (3), pero con $\phi = \phi_j$ y $g = \phi_i$ y obtenemos que

$$\lambda_j \int_{\Omega} \phi_j(\vec{x}) \phi_i(\vec{x}) dx = \int_{\Omega} \nabla \phi_j(\vec{x}) \cdot \nabla \phi_i(\vec{x}) dx \quad 0.5pts$$

Restando esta igualdad con (5) y usando que el producto es conmutativo, queda

$$(\lambda_j - \lambda_i) \int_{\Omega} \phi_i(\vec{x}) \phi_j(\vec{x}) dx = 0.$$

Como $i \neq j$ y la sucesión es estrictamente creciente, se tiene que $\lambda_i \neq \lambda_j$, por lo tanto (??) implica que

$$\int_{\Omega} \phi_i(x) \phi_j(x) dx = 0 \quad \forall i \neq j \quad 0.5pts$$

Esto último junto a (5) implica que ambas integrales son nulas, es decir, (4) 0.5pts

2d) (Optativa: 1 pto.) Si se define el espacio vectorial $V_N = \langle \phi_1, \dots, \phi_N \rangle$, use la ortogonalidad de las funciones ϕ_i probada en (4), para obtener una fórmula de Fourier mediante la cual una función $F(\vec{x})$ definida en Ω se podría proyectar ortogonalmente sobre V_N .

Usando el producto interno usual $\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(\vec{x}) g(\vec{x}) dx$, tenemos que $S_f = \sum_{k=1}^N C_k \phi_k(\vec{x})$ es la proyección ortogonal de $F(\vec{x})$ sobre V_N ssi $F(\vec{x}) - S_N(\vec{x}) \perp \phi_i, \forall i \in \{1, \dots, N\}$. 0.4pts

Es decir

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} (F(\vec{x}) - S_N(\vec{x})) \phi_i(\vec{x}) dx \\ &= \int_{\Omega} F(\vec{x}) \phi_i(\vec{x}) dx - \int_{\Omega} \sum_{k=1}^N C_k \phi_k(\vec{x}) \phi_i(\vec{x}) dx \\ &= \int_{\Omega} F(\vec{x}) \phi_i(\vec{x}) dx - \sum_{k=1}^N C_k \underbrace{\int_{\Omega} \phi_k(\vec{x}) \phi_i(\vec{x}) dx}_{=0 \text{ si } k \neq i} \\ &= \int_{\Omega} F(\vec{x}) \phi_i(\vec{x}) dx - C_i \int_{\Omega} \phi_i^2(\vec{x}) dx \quad 0.4pts \end{aligned}$$

De aquí se obtiene la fórmula de Fourier para los coeficientes C_i :

$$C_i = \frac{\int_{\Omega} F(\vec{x}) \phi_i(\vec{x}) dx}{\int_{\Omega} \phi_i^2(\vec{x}) dx}, \quad f \approx S_f = \sum_{k=1}^N C_k \phi_k(\vec{x}) \quad 0.2pts$$

Considere la EDP (1)–(2) en el caso particular en que $\Omega = [0, \pi] \times [0, \pi] \subseteq \mathbb{R}^2$, es decir:

$$(EDP) : \quad \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial y^2} = -\lambda \phi(x, y) \quad \forall x \in (0, \pi), \forall y \in (0, \pi), \quad (6)$$

$$(CB1) : \quad \phi(0, y) = \phi(\pi, y) = 0 \quad \forall y \in (0, \pi), \quad (7)$$

$$(CB2) : \quad \phi(x, 0) = \phi(x, \pi) = 0 \quad \forall x \in (0, \pi). \quad (8)$$

Usando la separación de variables $\phi(x, y) = P(x)Q(y)$ se pide:

2e) (1 pto.) Pruebe que si existe $y_0 \in (0, \pi)$ tal que $Q(y_0) \neq 0$ entonces para que ϕ resuelva la EDP (6)–(7), la función $P(x)$ debe ser solución de una ecuación diferencial del tipo

$$P''(x) = -\mu P(x), \text{ tal que } P(0) = P(\pi) = 0. \quad (9)$$

Usando la separación de variables indicada, la EDP (6) se reescribe como:

$$P''(x)Q(y) + P(x)Q''(y) = -\lambda P(x)Q(y) \quad \forall x \in (0, \pi), \forall y \in (0, \pi). \quad (10)$$

Si existe tal y_0 , se divide todo por $Q(y_0)$, obteniendo:

$$P''(x) + P(x) \frac{Q''(y_0)}{Q(y_0)} = -\lambda P(x) \quad \forall x \in (0, \pi).$$

de donde despejando queda

$$P''(x) = -\left(\lambda + \frac{Q''(y_0)}{Q(y_0)}\right)P(x) \quad \forall x \in (0, \pi).$$

Así, P es solución de la EDO (9), simplemente llamando $\mu = \lambda + \frac{Q''(y_0)}{Q(y_0)}$.

Además, la CB (7) requiere que

$$P(0)Q(y) = P(\pi)Q(y) = 0 \quad \forall y \in (0, \pi).$$

En particular, para $y = y_0$, se divide por $Q(y_0)$ y queda

$$P(0) = P(\pi) = 0.$$

2f) (1.5 ptos.) Resuelva la ecuación (9) y deduzca que los únicos valores de μ para los cuales la solución P es no trivial son de la forma $\mu_m = m^2$ donde $m \in \mathbb{N}^*$. Encuentre las correspondientes funciones $P_m(x)$.

Sabemos que si $\mu > 0$ las soluciones son funciones trigonométricas, si $\mu = 0$ son rectas y $\mu < 0$ se trata de exponenciales o funciones hiperbólicas. En único caso compatible con las CB es $\mu > 0$.

En este caso, la solución General es $P(x) = A \cos(\sqrt{\mu}x) + B \sin(\sqrt{\mu}x)$.

Imponiendo $P(0) = 0$ Resulta $A = 0$. O sea, $P(x) = B \sin(\sqrt{\mu}x)$.

Imponiendo $P(\pi) = 0$ queda $B \sin(\sqrt{\mu}\pi) = 0$ de donde, para no obtener soluciones triviales, se obtiene $\sqrt{\mu} = m$ donde $m \in \mathbb{N}^*$.

Es decir $\mu_m = m^2$ y $P_m(x) = B_m \sin(mx)$. Se puede escoger $B_m = 1$.

2g) (1 pto.) Dado que para todo m , existe $x_m \in (0, \pi)$ donde $P_m(x_m) \neq 0$ entonces pruebe que la función $Q(y)$ debe ser solución de una ecuación diferencial del tipo

$$Q''(y) = -(\lambda - m^2)Q(y), \text{ tal que } Q(0) = Q(\pi) = 0. \quad (11)$$

Efectivamente, en $x_m = \frac{\pi}{2m}$ se tiene que $P(x_m) = 1 \neq 0$.

Volviendo a (10), se tiene que por un lado $P''_m(x) = -m^2 P_m(x)$ con lo cual tenemos

$$-m^2 P_m(x)Q(y) + P_m(x)Q''(y) = -\lambda P_m(x)Q(y) \quad \forall x \in (0, \pi), \forall y \in (0, \pi).$$

Por otro lado, evaluando en x_m , se puede dividir por $P_m(x_m)$ quedando:

$$-m^2 Q(y) + Q''(y) = -\lambda Q(y) \quad \forall y \in (0, \pi).$$

De aquí se obtiene la EDO (11) simplemente despejando Q'' .

Además, las CB(8) se escriben

$$P_m(x)Q(0) = P_m(x)Q(\pi) = 0 \quad \forall x \in (0, \pi)$$

En particular, en x_m se puede dividir por $P_m(x_m)$ quedando las CB de (11).

2h) (1.5 ptos.) Resuelva la ecuación (11) y deduzca que los únicos valores de $(\lambda - m^2)$ para los cuales la solución Q es no trivial son de la forma $(\lambda - m^2) = n^2$ donde $n \in \mathbb{N}^*$. Encuentre las correspondientes funciones $Q_n(y)$.

La EDO (11) se resuelve en forma análoga a la EDO (9), quedando:

$(\lambda - m^2) = n^2$, donde $n \in \mathbb{N}^*$ y $Q_n(y) = \text{sen}(ny)$. Se puede escogir $B_n = 1$.

1.5pts

2i) (1.5 ptos.) Usando las partes anteriores, escriba en forma explícita cuales son todas las funciones $\phi_{m,n}(x, y)$ y los correspondientes valores de $\lambda_{m,n}$ que resuelven el problema de vectores y valores propios del Laplaciano enunciado en (6)–(8). Use resultados clásicos de Series de Fourier para probar que las funciones $\phi_{m,n}$ y $\phi_{k,\ell}$ son ortogonales si $k \neq m$ ó $n \neq \ell$. Calcule además la norma L^2 de cada función $\phi_{m,n}(x, y)$.

Indicación: Use el producto interno usual $\langle f, g \rangle = \int_{[0,\pi] \times [0,\pi]} f(x, y)g(x, y)dx dy$

Reuniendo los resultados previos, hemos encontrado las soluciones no triviales:

$$\phi_{m,n}(x, y) = \text{sen}(mx) \text{sen}(ny), \quad \lambda_{m,n} = m^2 + n^2, \quad m, n \in \mathbb{N}^*$$

0.5pts

Ortogonalidad:

$$\begin{aligned} \langle \phi_{m,n}, \phi_{k,\ell} \rangle &= \int_{x=0}^{\pi} \int_{y=0}^{\pi} (\text{sen}(mx) \text{sen}(ny) \text{sen}(kx) \text{sen}(\ell y)) dx dy \\ &= \left\{ \int_0^{\pi} \text{sen}(mx) \text{sen}(kx) dx \right\} \left\{ \int_0^{\pi} \text{sen}(ny) \text{sen}(\ell y) dy \right\} \\ &= \frac{\pi}{2} \delta_{mk} \cdot \frac{\pi}{2} \delta_{nl} = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq k \text{ ó } n \neq \ell \\ \frac{\pi^2}{4} & \text{si } (m, n) = (k, \ell) \end{cases} \end{aligned}$$

0.5pts

0.5pts

2j) (1 pto.) Demuestre que la familia $\{\phi_{m,n}(x, y)\}$ es completa en $L^2([0, \pi] \times [0, \pi])$.

Consideremos una función $f(x, y) \in L^2(\Omega)$ tal que:

$$\int_{x=0}^{\pi} \int_{y=0}^{\pi} f(x, y) \text{sen}(mx) \text{sen}(ny) dx dy = 0, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}^*$$

Lo anterior se puede escribir como:

$$\left\{ \int_{x=0}^{\pi} \text{sen}(mx) \underbrace{\left\{ \int_{y=0}^{\pi} f(x, y) \text{sen}(ny) dy \right\}}_{=F_n(x)} dx = 0, \quad \forall m \in \mathbb{N}^* \right\} \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Como las funciones $\{\text{sen}(mx)\}$ forman una familia completa en $L^2(0, \pi)$ se deduce que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $F_n = 0$, es decir:

$$\left\{ \int_{y=0}^{\pi} f(x, y) \text{sen}(ny) dy = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \right\} \underbrace{\text{c.t.p } x \in (0, \pi)}_{\sim \forall x}$$

0.5pts

Como las funciones $\{\text{sen}(ny)\}$ forman una familia completa en $L^2(0, \pi)$ se deduce que c.t.p $x \in (0, \pi)$ $f(x, \cdot) = 0$, es decir:

$$f = 0 \quad \text{en } L^2(\Omega)$$

0.5pts

Formulario

$$f(x) \approx S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \quad (12)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad n \geq 0 \quad (13)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad n > 0 \quad (14)$$

$$\int_0^{\pi} \text{sen}^2(kx) = \int_0^{\pi} \cos^2(kx) = \frac{\pi}{2} \quad (15)$$

$$\Delta \phi = \text{div } \nabla \phi \quad (16)$$

$$g \text{div } \nabla \phi = \text{div } (g \nabla \phi) - \nabla \phi \cdot \nabla g \quad (17)$$

$$\int_{\Omega} \text{div } \vec{F}(x) dx = \int_{\partial \Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} dS \quad (18)$$

Una familia de funciones $\{\phi_{m,n}(x, y)\}_{m,n \in \mathbb{N}^*}$ es completa en $L^2(\Omega)$ si para todo $f(x, y) \in L^2(\Omega)$ se cumple que:

$$\left[\int_{\Omega} f(x, y) \phi_{m,n}(x, y) = 0, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}^* \right] \Rightarrow (f = 0)$$